Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2042)

UG (CBCS) Ist Year Annual Examination

2046

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Differential Calculus)

(Core)

Paper : MATH101T-H

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :- Attempt *five* questions in all. Section–A is compulsory and from Section–B, attempt *one* question from each of the Units I, II, III and IV.

कुल **पाँच** प्रश्नों को हल कीजिए। खण्ड-अ अनिवार्य है तथा खण्ड-ब की प्रत्येक इकाई I, II, III तथा IV में से **एक-एक** प्रश्न कीजिए।

hparamhub.in

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Using definition of limit, prove that :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

लिमिट की परिभाषा से सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

(ii) Find the fourth derivative of $x^3 \log x$.

$x^3 \log x$ के चौथे व्युत्पन्न का मान ज्ञात कीजिए।

(iii) Evaluate :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1}$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1}$$

(iv) State the Taylor's Theorem (with Lagrange's form of Remainder).

लैग्रांजे के शेष रूप के साथ टेलर की प्रमेय का वर्णन कीजिए।

(v) Examine for concavity and convexity the curve $y = x^3$.

वक्र $y = x^3$ की अवतलता तथा उत्तलता का परीक्षण कीजिए।

(vi) Define oblique asymptote.

परोक्ष अनन्तस्पर्शी को परिभाषित कीजिए।

hpexamhub.in

(vii) What are the necessary and sufficient conditions for any point on the curve to be multiple points ?

वक्र पर किसी बिन्दु के लिए बहु-बिन्दु होने की आवश्यक तथा पर्याप्त शर्तें क्या होंगी ?

(viii) If $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, find $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$.

यदि $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ हो, तो $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ का मान ज्ञात कीजिए। 8×2=16

Section–B (खण्ड–ब)

Unit–I (इकाई–I)

hpexamhub.in

.. (a) Let :

$$f(x) = \begin{cases} 3 & , \quad \text{if } x \le 2 \\ ax^2 + bx + 1 & , \quad \text{if } 2 < x < 3 \\ 7 - ax & , \quad \text{if } x \ge 3 \end{cases}$$

Determine the constants a and b so that $f(x)$ may be continuous for all x.

मान लो कि :

$$f(x) = \begin{cases} 3 & , \quad \text{यदि } x \le 2 \\ ax^2 + bx + 1 & , \quad \text{यदि } 2 < x < 3 \\ 7 - ax & , \quad \text{यदि } x \ge 3 \end{cases}$$

स्थिरांक a तथा b का मान ज्ञात कीजिए ताकि फलन $f(x)$ सभी x के लिए सतत् हो सके।

(b) Prove that every real valued function, which is derivable at a point of its domain, is also continuous at that point. Is converse is true ?

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक रीयल वैल्यूड फलन जो कि अपने डोमेन के एक बिन्दु पर व्युत्पन्न है उस बिन्दु पर भी सतत् है। क्या इसका उलटा भी सत्य है ? 6½,7

3. (a) If $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, find the value of $\frac{d^2y}{dx^2}$ at $x = a$.

यदि $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ हो, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का $x = a$ पर मान ज्ञात कीजिए।

(b) If $y=(\sin^{-1}x)^2$, find $y_n(0)$.

यदि $y=(\sin^{-1}x)^2$ हो, तो $y_n(0)$ का मान ज्ञात कीजिए। 7,6½

hpexamhub.in

Unit–II (इकाई–II)

4. (a) Find the values of constants a and b so that :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}$$

exists and equal to 1.

स्थिरांक a तथा b का मान ज्ञात कीजिए ताकि :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1 + a\cos x) - b\sin x}{x^3}$$

मौजूद हो और 1 के बराबर हो।

(b) State and prove Rolle's Theorem.

रौले की प्रमेय को सिद्ध कीजिए तथा वर्णन कीजिए। 6½,7

5. (a) Use Lagrange's mean value theorem to prove that :

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + xe^x \quad \forall \; x \geq 0$$

लैग्रांजे मीन वैल्यू की प्रमेय का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि :

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + xe^x \quad \forall \; x \geq 0$$

hbexamhub.in

(b) Use Maclaurin's theorem with Lagrange's form of remainder to expand $\sin x$ as for the nth term in terms of ascending powers of x.

लैग्रांजे के शेष रूप के साथ मैक्लोरिन की प्रमेय के प्रयोग से $\sin x$ को x की आरोही शक्तियों के रूप में nवें पद तक विस्तार कीजिए। 7,6½

Unit–III (इकाई–III)

6. (a) Determine the interval in which the curve $y = 3x^5 - 40x^3 + 3x - 20$ is concave upwards or downwards.

वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें वक्र $y = 3x^5 - 40x^3 + 3x - 20$ ऊपर की ओर या नीचे की ओर अवतल हो।

(b) Prove that the curvature of a circle is constant and is equal to the reciprocal of the radius.

सिद्ध कीजिए कि वृत्त की वक्रता स्थिर है और उसकी पारस्परिक त्रिज्या के बराबर है। 6½,7

(a) Find all the asymptotes of the curve $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

वक्र $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ की सभी अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

neexamhub.in

(b) Examine the curve $x^3 + 2x^2 + 2xy - y^2 + 5x - 2y = 0$ for a double point and show that it is a cusp.

वक्र $x^3 + 2x^2 + 2xy - y^2 + 5x - 2y = 0$ के दोहरे बिन्दु का परिक्षण कीजिए और सिद्ध कीजिए कि वह बिन्दु कस्प है। 7.6½

Unit–IV (इकाई–IV)

3. (a) Discuss the continuity of the function $f(x, y)$ defined by :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

at origin.

मूल-बिन्दु पर फलन :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

की सततता का परीक्षण कीजिए।

hpexamhub.in

(b) If $u=\tan^{-1}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x+y}\right)$, prove that :

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\sin 2u$$

यदि $u=\tan^{-1}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x+y}\right)$ हो, तो दर्शाइए कि :

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\sin 2u$$ 7,6½

) Find the maximum and minimum value of $x^2 + y^2$ subject to the condition $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$.

यदि $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$ की शर्त हो, तो $x^2 + y^2$ का अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

) Show that the functions :

$$u = \frac{x}{y-z}, v = \frac{y}{z-x}, w = \frac{z}{x-y}$$

are not independent of one another. Also find the relation between them.

दर्शाइए कि फलन :

$$u = \frac{x}{y-z}, v = \frac{y}{z-x}, w = \frac{z}{x-y}$$

एक दूसरे पर स्वतंत्र नहीं हैं और उनके बीच का सम्बन्ध ज्ञात कीजिए। 7,6½

hpexamhub.in